ECOLE NAVALE

Concours 1975

Première composition de mathématiques

On appelle $\mathcal{F}$ l'espace vectoriel réel des fonctions numériques d'une variable réelle, définies et continues sur $\mathbb{R}$, et on envisage l'application φ de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$ où l'image $g = \varphi(f)$ d'une fonction f est définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad g(x) = \int_0^x f(t) \sin(x - t)\, dt$$

L'ensemble des fonctions g images des éléments de $\mathcal{F}$ sera noté $Im\,\varphi$.

La question 5° est indépendante des questions 3° et 4° et ne nécessite que la connaissance de la relation (R) qui sera définie au 2°.

1° Calculer $g(x)$ dans les deux cas suivants :

$$f(x) = e^x \quad ; \quad f(x) = \sin ax$$

2° f est maintenant un élément quelconque de $\mathcal{F}$. Montrer que g est deux fois dérivable. Calculer g''.

On trouvera que g'' est donnée par une relation (R) de la forme

$$(R) \quad g'' = \alpha f + \beta g \quad (\alpha, \beta \text{ constantes})$$

Réciproquement, si f et g vérifient (R) a-t-on $g = \varphi(f)$?

3° Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{F}$. Est-il injectif ? surjectif ?

Montrer que $Im\,\varphi$ est l'ensemble des fonctions deux fois dérivables qui s'annulent, ainsi que leur dérivée première, pour $x = 0$.

φ admet-il des vecteurs propres ?

4° Soit φ_1 la restriction de φ à $Im\,\varphi$. φ_1 est-il un automorphisme de $Im\,\varphi$? Montrer que

$$\forall g \in Im\,\varphi \quad \varphi(g'') = [\varphi(g)]''$$

En déduire $Im\,\varphi_1$.

5° Soit λ un nombre donné. On se propose de rechercher s'il existe des fonctions f, développables en série entière, non nulles, et telles que si $g = \varphi(f)$ alors $\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = \lambda x^2 f(x)$

Former une équation différentielle du second ordre que devra vérifier la fonction g.

Montrer qu'il existe deux valeurs de λ et deux seulement pour lesquelles le problème admet des solutions.

On prend la valeur λ_0 de λ pour laquelle il existe une fonction g telle que $g''(0) = 2$. Donner le développement de cette fonction en série entière. Quel en est le rayon de convergence ?

Montrer que le développement obtenu est la somme de deux séries entières liées aux développements de fonctions élémentaires.

En déduire, dans le cas de $\lambda = \lambda_0$ les fonctions f qui répondent à la question.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail